1

FISICA CUANTICA II
CONTROL DE MAYO, CUESTIONES

CURSO 2022/2023 19 de Mayo de 2023

Los números entre corchetes indican el valor de cada apartado.

Esta prueba cuenta un 25% de la nota del control final.

1[3].- Sea A un operador hermitico y $|\psi\rangle$ uno de sus autovectores con autovalor a. El vector $|\psi\rangle$ esta normalizado. Sea U un operador unitario cuyo conmutador con A es:

$$[A, U] = 2U + UA^2 .$$

Obtengase el valor esperado de A en el estado:

$$|\varphi\rangle = U\,|\psi\rangle .$$

2[4].- Considerese un sistema en un espacio de Hilbert bidimensional con una base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$. En el instante inicial $t = 0$ el vector de estado del sistema es

$$|\psi(0)\rangle = |1\rangle .$$

Si el hamiltoniano del sistema es:

$$H = \hbar\,\omega\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right),$$

siendo ω una constante real. ¿Cual es la probabilidad de que, transcurrido un tiempo t, el sistema se encuentre en el estado $|2\rangle$?.

3[3].- Un trompo simetrico tiene por hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2I_1}\left(L_1^2 + L_2^2\right) + \frac{1}{2I_2}\,L_3^2 ,$$

donde I_1 e I_2 son momentos de inercia y L_i $(i = 1, 2, 3)$ son las tres componentes del momento angular orbital $\vec{L}$ a lo largo de los ejes coordenados. Calculense los autovalores de la energia y obtengase su degeneracion.

Sea A un operador hermitico y $|\psi\rangle$ uno de sus autovectores con autovalor a. Sea U un operador unitario, cuyo conmutador con A es

$$[A, U] = 2U + UA^2$$

Obtengase el valor esperado de A en el estado

$$|\varphi\rangle = U|\psi\rangle$$

($|\psi\rangle$ esta normalizado)

$$|\varphi\rangle = U|\psi\rangle \Rightarrow \langle\varphi| = \langle\psi|U^{+} \overset{\text{Unitario}}{=} \langle\psi|U^{-1}$$

Entonces

$$\langle A\rangle_\varphi = \langle\varphi|A|\varphi\rangle = \langle\psi|U^{-1}\underbrace{AU}_{[A,U]+UA}|\psi\rangle =$$

$$= \langle\psi|U^{-1}(\underbrace{[A,U]}_{2U+UA^2} + UA)|\psi\rangle =$$

$$= \langle\psi|\cancel{U^{-1}}\cancel{U}(2 + A^2 + A)|\psi\rangle =$$

$$= \langle\psi|(2 + A^2 + A)|\psi\rangle = (2 + a^2 + a)\underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle A\rangle_\varphi = a^2 + a + 2}$$

Considerese un sistema con un espacio de Hilbert bidimensional con una base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$. En el instante inicial $t=0$ el vector de estado es:

$$|\psi(0)\rangle = |1\rangle$$

Si el hamiltoniano del sistema es

$$H = \hbar\omega\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right) \qquad \omega\in\mathbb{R}$$

¿Cual es la probabilidad de que, transcurrido un tiempo t, el sistema se encuentre en el estado $|2\rangle$?.

$$H = \hbar\omega\left(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right) = \hbar\omega\,\sigma_x \Rightarrow$$

$$U(t) = e^{-i/\hbar\, H t} = e^{-i/\cancel{\hbar}\,\cancel{\hbar}\omega t\,\sigma_x} = e^{-i\omega t\,\sigma_x} =$$

$$= \cos(\omega t) - i\,\mathrm{sen}(\omega t)\,\sigma_x = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -i\,\mathrm{sen}(\omega t) \\ i\,\mathrm{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Entonces

$$|\psi(t)\rangle = U\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ -i\,\mathrm{sen}(\omega t)\end{pmatrix}$$

y

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \cos(\omega t)\,|1\rangle - i\,\mathrm{sen}(\omega t)\,|2\rangle}$$

$$P(|1\rangle\to|2\rangle; t) = |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{P(|1\rangle\to|2\rangle; t) = \mathrm{sen}^2(\omega t)}$$

Un trompo simetrico tiene como hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2I_1}(L_1^2 + L_2^2) + \frac{1}{2I_2} L_3^2$$

donde I_1 e I_2 son momentos de inercia y L_i $(i=1,2,3)$ son las tres componentes del operador momento angular orbital $\vec{L}$ a lo largo de los ejes coordenados. Calculense los autovalores de la energia y obtengase su degeneracion.

Escribamos H en la forma

$$H = \frac{1}{2I_1}(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) + \left(\frac{1}{2I_2} - \frac{1}{2I_1}\right) L_3^2$$

Es decir

$$\boxed{H = \frac{1}{2I_1}\vec{L}^2 + \left(\frac{1}{2I_2} - \frac{1}{2I_1}\right) L_3^2}$$

H es diagonal en la base en la cual $\vec{L}^2$ y L_3 lo son. Sean $|l,m\rangle$ estos vectores:

$$L^2 |l,m\rangle = l(l+1)\hbar^2 |l,m\rangle \qquad l = 0,1,\ldots$$

$$L_3 |l,m\rangle = m\hbar |l,m\rangle \qquad -l \leq m \leq +l$$

Entonces

$$H|l,m\rangle = \frac{1}{2I_1} l(l+1)\hbar^2 |l,m\rangle + \left(\frac{1}{2I_2} - \frac{1}{2I_1}\right)\hbar^2 m^2 |l,m\rangle$$

Entonces

$$\boxed{H|l,m\rangle = E_{l,m} |l,m\rangle}$$

$$\boxed{E_{l,m} = \frac{\hbar^2}{2I_1} l(l+1) + \left(\frac{1}{2I_2} - \frac{1}{2I_1}\right)\hbar^2 m^2}$$

$\boxed{m = 0 \rightarrow \text{no degenerado}}$ $\boxed{m \neq 0 \rightarrow \text{doble degeneracion}}$